

## تحلیل کمانش پانل کامپوزیتی ساندویچی با هسته میانی هدفمند

### مقارن به روش تئوری مرتبه بالای بهبودیافته

کرامت ملک‌زاده فرد<sup>۱</sup> مسعود ابراهیمی<sup>۲</sup>، علی نظری<sup>۳</sup> و سعید ایرانی<sup>۴</sup>  
 دانشکده مهندسی هوافضا دانشکده مهندسی هوافضا  
 دانشگاه صنعتی مالک اشتر دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی  
 ( تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۸/۱۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۰/۱/۲۹ )

#### چکیده

در تحقیق حاضر کمانش پانل ساندویچی مستطیلی با دو رویه چندلایه کامپوزیتی و هسته میانی از جنس مواد هدفمند مقارن در محدوده الاستیک خطی تحلیل و بررسی شده است. بارگذاری تک‌محوره فشاری روی لبه‌های رویه‌های بالا و پایین در دو سوی پانل به صورت هم‌زمان و یکنواخت اعمال شده است. با استفاده از قضایای روش‌های تغییراتی و اصل هم‌پلتن، اکستریم انرژی کل ذخیره شده در سازه که همان معادلات تعادل پانل است، استخراج گردیده است. در فرمول بندی ریاضی از تئوری جدید بهبود یافته مرتبه بالای پانل ساندویچی استفاده شده است. تئوری به کار رفته در رویه‌ها، تئوری برشی مرتبه اول است. جابه‌جایی‌های هسته در جهات مختلف با چند جمله‌ای‌هایی با ضرایب نامشخص طراحی و فرض شده است که هسته قابلیت تحمل تنش‌های برشی و نرمال صفحه‌ای را دارد. از اثرات دما و رطوبت چشم‌پوشی و هسته هدفمند به صورت مقارن طراحی شده است. در پایان، اثرات تغییر نسبت طول به عرض پانل، ضخامت کل به طول و یا عرض، نسبت مدول الاستیسیته ماده طرفین هسته به مرکز آن و نوع تابع توزیع خواص ماده هدفمند با انواع توان‌های توزیع بر بار بحرانی کمانش مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. نتایج عددی نشان می‌دهند که در هسته‌های ضخیم هدفمند نمی‌توان از اثرات تنش‌های صفحه‌ای روی بار بحرانی کمانش صرف‌نظر کرد. همچنین نوع تابع توزیع خواص و عدد توان توزیع در نظر گرفته شده در هسته هدفمند تأثیرات قابل ملاحظه‌ای روی بار بحرانی کمانشی پانل دارد.

**واژه‌های کلیدی:** کمانش، پانل ساندویچی، هسته هدفمند، تئوری مرتبه بالای بهبودیافته

## Buckling Analysis of Composite Sandwich Panel with Symmetric FGM Core, Using Improved High-order Theory

K. Malekzadeh Fard M. Ebrahimi, A. Nazari, and S. Irani

Aerospace Eng. Dep't  
Malek Ashtar Univ.

Aerospace Eng. Dep't  
K.N Toosi Univ. of Tech.

(Received: 1 Nov., 2010; Accepted: 18 Apr., 2011)

#### ABSTRACT

In this paper, linear elastic buckling analysis of rectangular composite sandwich panel with composite laminate faces and symmetric functionally graded material (FGM) core is presented. Unidirectional steady in-plane forces and simply supported boundary conditions are applied on the faces' edges only. Hamilton principle and functional method are used to derive equilibrium equations, which are usually minimum functional of stored energy. In the mathematical formulation a new improved higher-order sandwich panel theory (IHSAPT) was used. First shear deformation theory (FSDT) is used for faces. Core displacement in various directions is modeled by polynomial function with indeterminate coefficients. It is assumed that the core is able to sustain shear and normal in-plane stresses. Temperature and humidity effects are neglected and the FGM core is modeled symmetrically. Finally, the effects of aspect ratio, thickness to side ratio, core materials' modulus ratio, and various kinds of FGM distribution functions and powers on the critical buckling load are investigated. The numerical results show, that the effects of in plane stresses in the thick functionally graded cores on the critical buckling load cannot be neglected. Also, the effects of type of FGM distribution functions and powers on the critical buckling load are considerable.

**Keywords:** Buckling, Sandwich Panel, FGM Core, Improved Higher Order Sandwich Plate Theory

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): k.malekzadeh@gmail.com

۲- کارشناس ارشد: masoudebrahimi@rocketmail.com

۳- کارشناس ارشد: nazariali23@yahoo.com

۴- استادیار: irani@kntu.ac.ir

## ۱- مقدمه

اصول کلی حاکم بر سازه‌های ساندویچی با وجود تنوع بالای آنها یکسان است. این سازه‌ها از دو رویه قوی و نازک (که یک هسته ضخیم با چگالی پایین را دربرگرفته‌اند)، همراه با عامل اتصال رویه به هسته، تشکیل شده‌اند. هرچه قطر هسته بیش‌تر شود، سختی و سفتی کل پانل افزایش خواهد یافت. ولی این ازدیاد سختی به هیچ وجه با افزایش وزن پانل قابل مقایسه نیست. موادی که می‌توانند به عنوان هسته و یا رویه انتخاب شوند، از نظر جنس و شکل فیزیکی دارای تنوع هستند. انتخاب مواد با توجه به کاربرد سازه و نحوه بارگذاری آن، استحکام مورد نیاز، شرایط محیطی، هزینه، مدت زمان استفاده، امکان تهیه مواد، مقدار پیچیدگی ساخت، وزن، قابلیت تعمیرپذیری و غیره انجام می‌پذیرد.

یکی از اصلی‌ترین نگرانی‌ها در مورد چنین ساختارهایی احتمال ترک و تورق در سطح مشترک هسته و رویه، بر اثر تمرکز تنش‌های برشی عرضی ناشی از اختلاف سختی بین رویه‌ها و هسته است که می‌تواند باعث افت شدید قابلیت اطمینان سازه شود. مواد هدفمند<sup>۱</sup> گروه جدیدی از مواد ترکیبی ناهمگن هستند که آرایش و نسبت ترکیب مواد و خصوصیات فیزیکی آنها به صورت پیوسته و نرم در یک یا چند مختصات سه بعدی (با استفاده از تغییر در خواص، اندازه و شکل متفاوت تقویت‌کننده‌ها)، از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌نماید. تحقیقات تجربی و تئوری اخیر نشان داده که به‌کارگیری هسته هدفمند در ساختارهای ساندویچی، تنش‌های برشی میان دو صفحه را به شدت کاهش می‌دهد. هم‌چنین مشکل پیدایش ترک در مواد کامپوزیتی که ناشی از تنش‌های پسماند و به دلیل اختلاف ضریب انبساط حرارتی بین الیاف و ماده زمینه است، در مواد هدفمند به دلیل تغییر تدریجی نسبت مواد ترکیبی رفع شده است. در کامپوزیت‌های لایه‌ای، انتقال ناگهانی خصوصیات مواد از یک لایه به لایه دیگر باعث ایجاد تنش‌های نامطلوب بین لایه‌ای در فصول لایه‌ها می‌شود و این تنش‌ها می‌توانند باعث تغییر شکل پلاستیک، ایجاد ترک و یا حتی جدایش لایه‌ها شوند. این اثرات نامطلوب، با به‌کارگیری مواد هدفمند برطرف می‌شوند.

برای تحلیل کمانش این پانل‌های کامپوزیتی ساندویچی، بسیاری از محققان از تئوری مرتبه بالا استفاده نموده‌اند. کانت<sup>۲</sup> و پاتیل<sup>۳</sup> برای بررسی رفتار کمانشی، سازه ساندویچی را با سازه انعطاف‌پذیر مرتبه بالای برشی جایگزین نمودند [۱]. نقص این تحقیق، عدم توانایی محاسبه حالت‌های کمانش موضعی است. فراستیگ<sup>۴</sup>، کمانش پانل با هسته نرم و رویه‌های کامپوزیتی و لایه‌چینی نامتقارن و ناموازی را بر اساس تئوری مرتبه بالا با در نظر گرفتن اثرات انعطاف‌پذیری خارج از صفحه و سختی برشی هسته، بررسی نمود [۲]. کانت و سوآمیناتان از طرح مرتبه بالا برای تحقیقات روی پانل با هسته غیر قابل تراکم استفاده نمودند. آنها اثرات کرنش‌های نرمال در تحلیل کمانش پانل ساندویچی کامپوزیتی با شرایط مفصلی را در نظر گرفتند. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای مورد بررسی آنها بر پایه تئوری تک لایه بود [۳]. ردی<sup>۵</sup> روش‌هایی برای حل ورق‌های مستطیلی هدفمند بر پایه تئوری خویش (تغییر شکل برشی مرتبه سوم ورق‌ها) ارائه نمود [۴]. چنگ<sup>۶</sup> و باترا<sup>۷</sup> ارتباط خمش ورق هدفمند با شرایط مفصلی بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم با ورق همگن و مشابه کیرشهف را بررسی نمودند. هم-چنین نتایجی برای کمانش و ارتعاشات ورق مفصلی چند ضلعی هدفمند بر پایه تئوری ورق‌های ردی استخراج نمودند [۵]. جواهری و اسلامی کمانش مکانیکی و حرارتی ورق‌های مستطیلی هدفمند بر پایه تئوری مرتبه اول و مرتبه بالای ورق‌ها را بررسی نمودند [۶]. اندرسون<sup>۸</sup> برای بررسی اثر هسته هدفمند بر پانل‌های ساندویچی با رویه‌های ارتوتروپیک در بارگذاری عرضی، حل سه‌بعدی الاستیسیته‌ای را ارائه نمود [۷]. زنکور<sup>۹</sup>، بار بحرانی کمانش پانل‌های ساندویچی هدفمند را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی سینوسی مورد بررسی قرار داد [۸]. شرعیات و همکارانش رفتار کمانش ورق مستطیلی هدفمند با نواقص هندسی را مورد بررسی قرار دادند. معادلات تعادل، پایداری و سازگاری

2- Kant

3- Patil

4- Frosting

5- Reddy

6- Cheng

7- Batra

8- Anderson

9- Zenkour

1- Functionally Graded Material (FGM)

و یک عبارت جدید به نام تابع لایه مرزی تبدیل نمودند [۱۵].

## ۲- خواص مکانیکی مواد هدفمند

در پانل ساندویچی با هسته هدفمند و رویه‌های چندلایه، خواص هسته با توجه به نوع تابع توزیع هدفمند از سطح بالایی آن تا پایین تغییر نموده و در مرز مشترک با رویه‌ها با خواص آن‌ها یکسان می‌شود. در پایان، ساختاری به وجود می‌آید که خواص آن مانند مدول الاستیسیته یا چگالی در هسته با رویه‌ها برابر است. در حالی که یکی از اهداف کاربرد پانل‌های ساندویچی کم نمودن وزن سازه بوده و با ساختار گفته شده پانل این هدف به دست نمی‌آید. از طرفی وجود رویه در ساندویچ‌ها به طور معمول برای انتقال بارگذاری‌های انجام شده به هسته که قابلیت تحمل بارگذاری مستقیم را ندارد، می‌باشد. ولی در این پانل چون خود هسته به سختی و محکمی رویه‌هایش است، وجود رویه‌های چند لایه توجیه‌پذیر نیست. در حقیقت این ساختار مانند یک ورق هدفمند سنگین و ضخیم عمل می‌نماید.

## ۲-۱- ایده ماده هدفمند متقارن

راه‌حلی که پیشنهاد می‌شود استفاده از مواد هدفمند با توزیع متقارن است. در این توزیع، خواص مواد از حالت یک  $(E_1, \nu_1, \rho_1, \dots)$  شروع و در میانه هسته به حالت دو  $(E_2, \nu_2, \rho_2, \dots)$  می‌رسد و دوباره در سمت دیگر هسته، به خواص حالت یک ختم می‌شود.

## ۲-۲- توزیع خواص به صورت چند جمله‌ای

در این طرح، کسر حجمی به صورت رابطه (۱) فرض شده است:

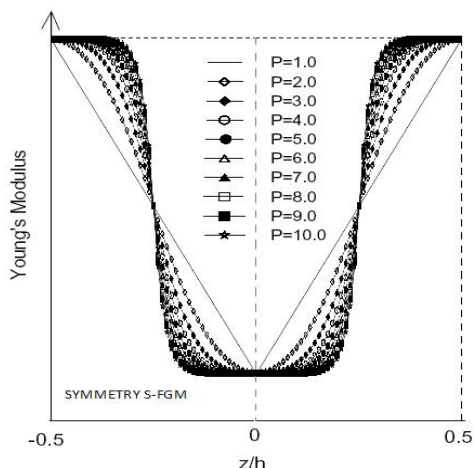
$$V_z = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p, \quad (1)$$

که در آن،  $p$  از عوامل ماده و  $h$  ضخامت صفحه است. سپس با استفاده از قانون مخلوط‌ها و کسر حجمی تعریف شده داریم:

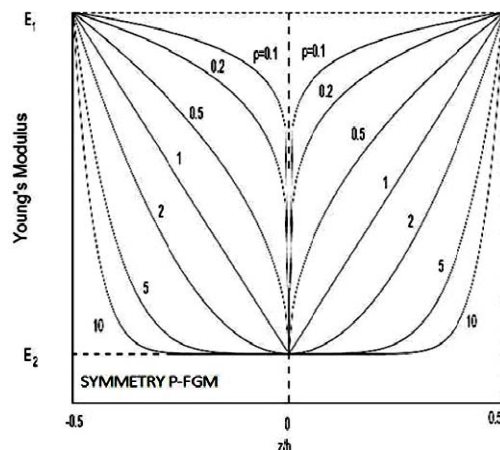
$$E_z = V_z (E_1 - E_2) + E_2. \quad (2)$$

این ورق، با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها استخراج نمودند. آن‌ها نتایج تحقیق خود را با ورق هدفمند کامل و ورق ایزوتروپیک ناقص مقایسه نمودند [۹]. آیداگدو<sup>۱</sup> در تحقیق خود در زمینه کمانش ورق‌های هدفمند، با توجه به اینکه این ورق‌ها به طور معمول به صورت نامتقارن ساخته شده‌اند، ثابت نمود که یک گشتاور خمشی در شرایط مرزی، دور تا دور مفصل و بارگذاری در صفحه مورد نیاز است تا ورق قبل از شروع کمانش به علت متقارن نبودن خواص مواد نسبت به صفحه میانی تغییر شکل ندهد و هم‌چنان مسطح باقی بماند [۱۰]. کپن و همکارانش طرح‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول ورق را برای طراحی سازه‌های ساخته شده از مواد هدفمند ارائه نمودند. آن‌ها از معادله انرژی برای بررسی عوامل برش عرضی استفاده نمودند [۱۱]. ارتعاشات آزاد و کمانش صفحات ساخته شده از مواد هدفمند با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل‌های برشی عرضی، نرمال و اینرسی پیچشی توسط ماتسوناگا<sup>۲</sup> بررسی شد. وی برای تغییر مکان‌ها از سری توانی استفاده نمود و تئوری مرتبه بالای دو بعدی‌ای را با استفاده از اصل همپلتون برای بررسی ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند ارائه نمود [۱۲]. آبریت<sup>۳</sup> در تحقیق خود نشان داد که با انتخاب صفحه مبدأ مناسب در ورق‌های هدفمند، می‌توان اتصال بین تغییر شکل‌های خمشی و در صفحه را که ناشی از متقارن نبودن توزیع مواد در ساختارهای هدفمند است و باعث پیچیدگی تحلیل این صفحات شده، حذف نمود [۱۳]. کاشتالیان<sup>۴</sup> و منشیکووا<sup>۵</sup> تحلیل پانل ساندویچی با هسته هدفمند تحت بارگذاری عرضی به روش تئوری الاستیسیته سه بعدی را انجام دادند [۱۴]. بوداگی و سعیدی حل تحلیلی خود را برای تحلیل کمانش ورق‌های هدفمند ضخیم مستطیلی ارائه نمودند. آن‌ها معادلات پایداری و تعادل را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا استخراج و جهت تحلیل معادلات حاکم بر پایداری در ورق‌های هدفمند را به دو معادله دیفرانسیلی متصل نشده با عبارات تغییر مکان عرضی

1- Aydoghu  
2- Matsunaga  
3- Abrate  
4- Kashtalyan  
5- Menshykova



شکل (۲): تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت یک SYMMETRY S-FGM.

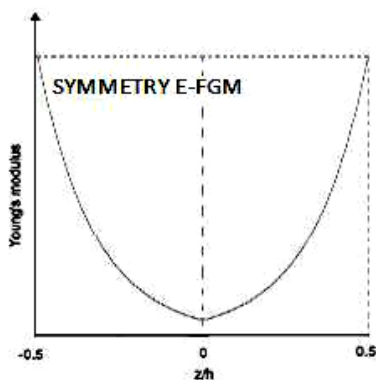


شکل (۱): تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت یک SYMMETRY P-FGM.

### ۴-۲- توزیع خواص به صورت نمایی

یکی از پرکاربردترین طرح‌ها برای توزیع خواص، تابع نمایی است که در شکل ۳ نمونه متقارن و در رابطه (۵) توزیع خواص آن ملاحظه می‌شود.

$$\begin{cases} E_z = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \\ B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \end{cases} \quad (۵)$$



شکل (۳): تغییرات مدول یانگ در جهت ضخامت یک SYMMETRY E-FGM.

در تابع توزیع متقارن می‌توان خواص حالت دو (ماده میانه هسته پانل) را بسیار پایین‌تر از حالت یک (ماده طرفین هسته پانل) گرفت و با توجه به انتخاب نوع و توان تابع توزیع هدفمند می‌توان به هسته‌ای رسید که در وسط بسیار نرم،

در شکل ۱ نمودار تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت ماده‌ای هدفمند با تابع توزیع خواص چندجمله‌ای متقارن ارائه شده است.

### ۳-۲- توزیع خواص به صورت S-مانند<sup>۱</sup>

در حالتی که تابع کسر حجمی به صورت یک تابع نمایی تعریف می‌شود، تمرکز تنش بر روی یکی از سطوح مشترک، جایی که ماده پیوسته است ولی تغییرات سریعی دارد، ظاهر خواهد شد. بنابراین برای اطمینان از توزیع یکنواخت تنش در میان کل سطوح مشترک، کسر حجمی توسط دو تابع نمایی تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} V_{1z} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1-z}{2} \right)^p & \text{for } 0 \leq z \leq \frac{h}{2}, \\ V_{2z} = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p & \text{for } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0. \end{cases} \quad (۳)$$

با همان روش استفاده شده در توزیع خواص به صورت چند جمله‌ای خواص مواد در این توزیع نیز به دست خواهد آمد:

$$\begin{cases} E_z = V_{1z} (E_1 - E_2) + E_2 & \text{for } 0 \leq z \leq \frac{h}{2}, \\ E_z = V_{2z} (E_1 - E_2) + E_2 & \text{for } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0. \end{cases} \quad (۴)$$

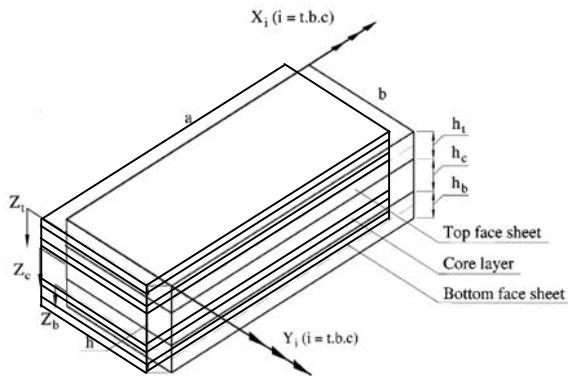
در شکل ۲ نمودار تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت ماده‌ای هدفمند با تابع توزیع خواص S مانند متقارن ارائه شده است.

1- Sigmoid FGM

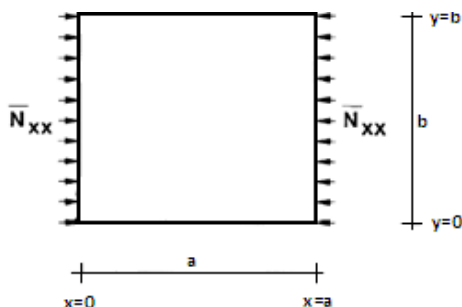
آنها و انواع توابع توزیع هدفمند برای هسته، تعیین نماید، حل تحلیلی پانل نامتقارن حتی با روش حل ناویر ممکن می‌شود، که می‌تواند موضوعی جدید برای ادامه تحقیق حاضر باشد.

### ۳- تعریف مسئله

پانل ساندویچی مورد مطالعه، مستطیلی با دو رویه چندلایه کامپوزیتی و هسته میانی از جنس مواد هدفمند است. ضخامت هسته میانی، رویه بالایی، رویه پایینی و کل پانل به ترتیب  $h_c, h_b, h_t, h$  است. طول و عرض پانل به ترتیب برابر با  $a$  و  $b$  می‌باشد. تحلیل انجام شده در محدوده الاستیک خطی است و لایه‌ها و هسته میانی به طور کامل به هم چسبیده و توابع کرنش در سطوح اتصال لایه‌ها پیوسته هستند. بارگذاری فشاری روی لبه رویه‌های بالا و پایین در دو سوی پانل به صورت هم‌زمان و یکنواخت اعمال خواهد شد. در شکل‌های ۴-۵، پانل و نحوه بارگذاری آن نشان داده شده است.



شکل (۴): پانل ساندویچی با رویه‌های چندلایه و هسته هدفمند.



شکل (۵): نحوه بارگذاری پانل ساندویچی.

ولی در دو سمت سفت و قابل استفاده در کاربردهای سازه‌ای باشد. در حالی که در طرح نامتقارن با توجه به یکسانی خواص مواد هسته در سطح مشترک با رویه مربوطه، نمی‌توان آن را خیلی نرم گرفت. چون در این صورت پانلی به وجود می‌آید که در یک سو خیلی سفت و در سوی دیگر خیلی نرم است. در نتیجه امکان بارگذاری مناسب وجود نخواهد داشت. همچنین در عمل، وجه سفت پانل وظیفه تحمل نیروهای وارده را عهده‌دار است. در نتیجه وجود وجه دیگر آن بیهوده بوده و رفتار پانل بیشتر شبیه یک ورق ضخیم خواهد شد. از سوی دیگر این عدم تقارن پراکندگی خواص نسبت به صفحه سطح میانی باعث می‌شود حل تحلیلی آن بسیار پیچیده شده و انجام آن با روش حل ناویر غیرممکن شود. زیرا در حالت نامتقارن اثر متقابل خمش و پیچش و سفتی‌های کوپلینگ خارج از صفحه که اثر متقابل نیروهای غشایی با انحناهای خمشی و یا نیروهای خمشی با کرنش‌های سطح میانی است، غیر صفر می‌شوند. تعبیر فیزیکی مسئله این است که پانل در اثر بارگذاری محوری فشاری قبل از اینکه به تغییر شکل کمانشی برسد، تغییر شکل خمشی ناشی از عدم تقارن سفتی‌های بالا و پایین پانل در آن رخ دهد.

فراسٹیگ<sup>۱</sup> [۲] در مقاله خود برای پانل‌های ساندویچی با هسته ایزوتروپ و همگن و با رویه‌های غیر یکسان در دو طرف، رابطه‌ای ارائه نموده است. این رابطه نسبت بارگذاری روی رویه بالا  $(\bar{N}'_{xx}, \bar{N}'_{yy})$  و رویه پایین  $(\bar{N}^b_{xx}, \bar{N}^b_{yy})$  را به نسبت سختی آن‌ها تعیین می‌نماید. یعنی هر رویه با توجه به سختی‌های درون محوری خود بخشی از بار فشاری که به صورت هم‌زمان روی لبه رویه‌های بالایی و پایینی اعمال می‌شود را تحمل می‌نماید. بنابراین هر دو رویه هم‌زمان به بار بحرانی کمانش خود می‌رسند و پانل، رفتاری مانند حالت متقارن خواهد داشت. چون عدم تقارن خواص نسبت به صفحه سطح میانی ماهیت هسته هدفمند است، این رابطه که با فرض همگن بودن هسته ارائه شده برای آن کارایی ندارد. البته اگر بتوان رابطه‌ای استخراج نمود که نسبت بارگذاری بر رویه‌ها را با در نظر گرفتن هم‌زمان عدم تقارن

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\alpha}^i = u_{\alpha,\alpha}^i + \frac{1}{2}(w_{\alpha,\alpha}^i)^2, & \kappa_{\alpha\alpha}^i = \psi_{\alpha,\alpha}^i, \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^i = v_{\alpha,\beta}^i + \frac{1}{2}(w_{\alpha,\beta}^i)^2, & \kappa_{\alpha\beta}^i = \psi_{\alpha,\beta}^i, \\ \gamma_{\alpha\beta}^i = u_{\alpha,\beta}^i + v_{\beta,\alpha}^i + (w_{\alpha,\beta}^i w_{\beta,\alpha}^i), & \kappa_{\alpha\beta}^i = \psi_{\alpha,\beta}^i + \psi_{\beta,\alpha}^i, \\ \gamma_{\alpha\alpha}^i = w_{\alpha,\alpha}^i, & \gamma_{\alpha\beta}^i = w_{\alpha,\beta}^i. \end{cases} \quad (8)$$

در نتیجه به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^i = u_{0,x}^i + \frac{1}{2}(w_{0,x}^i)^2 + z_i \psi_{x,x}^i, \\ \varepsilon_{yy}^i = v_{0,y}^i + \frac{1}{2}(w_{0,y}^i)^2 + z_i \psi_{y,y}^i, \\ \gamma_{xy}^i = u_{0,y}^i + v_{0,x}^i + (w_{0,y}^i w_{0,x}^i) + z_i (\psi_{x,y}^i + \psi_{y,x}^i), \\ \gamma_{xz}^i = \psi_x^i + w_{0,x}^i, & \gamma_{yz}^i = \psi_y^i + w_{0,y}^i. \end{cases} \quad (9)$$

میدان جابه‌جایی هسته میانی به صورت چندجمله‌ای با ضرایب نامعلوم فرض می‌شود:

$$\begin{aligned} u_c(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z_c u_1(x,y,t) \\ &\quad + z_c^2 u_2(x,y,t) + z_c^3 u_3(x,y,t), \\ v_c(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z_c v_1(x,y,t) \\ &\quad + z_c^2 v_2(x,y,t) + z_c^3 v_3(x,y,t), \\ w_c(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) + z_c w_1(x,y,t) \\ &\quad + z_c^2 w_2(x,y,t), \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن،  $u_c, v_c, w_c$  مؤلفه‌های تغییر مکان در هسته میانی پانل در جهت‌های  $x, y$  و  $z$  هستند. با در نظر گرفتن تغییر مکان‌های کوچک، روابط سینماتیکی کرنش‌ها به صورت زیر تعریف خواهند شد:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^c = u_{c,x} = u_{0,x} + z_c u_{1,x} + z_c^2 u_{2,x} + z_c^3 u_{3,x}, \\ \varepsilon_{yy}^c = v_{c,y} = v_{0,y} + z_c v_{1,y} + z_c^2 v_{2,y} + z_c^3 v_{3,y}, \\ \varepsilon_{zz}^c = w_{c,z} = w_1 + 2z_c w_2, \\ \gamma_{xy}^c = u_{c,y} + v_{c,x} = u_{0,y} + z_c u_{1,y} + z_c^2 u_{2,y} \\ \quad + z_c^3 u_{3,y} + v_{0,x} + z_c v_{1,x} + z_c^2 v_{2,x} + z_c^3 v_{3,x}, \\ \gamma_{xz}^c = u_{c,z} + w_{c,x} = u_1 + 2z_c u_2 + 3z_c^2 u_3 \\ \quad + w_{0,x} + z_c w_{1,x} + z_c^2 w_{2,x}, \\ \gamma_{yz}^c = v_{c,z} + w_{c,y} = v_1 + 2z_c v_2 + 3z_c^2 v_3 \\ \quad + w_{0,y} + z_c w_{1,y} + z_c^2 w_{2,y}. \end{cases} \quad (11)$$

برای استخراج معادلات تعادل، از روش تغییراتی استفاده شده است. در این روش، انرژی کل ذخیره شده در سازه تشکیل شده و سپس با استفاده از قضایای روش‌های تغییراتی، اکسترمم آن که همان معادلات تعادل پانل است استخراج می‌شود. استفاده از قضایای روش تغییراتی منجر به رسیدن به دستگاه معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی مناسب برای هر یک از متغیرها می‌شود.

#### ۴- فرمول‌بندی و تحلیل کمانش پانل

صرف‌نظر از ریاضیات حساب تغییرات، مهم‌ترین بخش تحلیل‌هایی که بر اساس حساب تغییرات انجام می‌شوند، حدس مناسب میدان جابه‌جایی بر پایه فرضیات اساسی تئوری الاستیسیته است. معادلات تعادل پانل ساندویچی پس از استفاده از روابط حساب تغییرات و دخالت دادن جنس مواد در آن به شکل دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌آید.

#### ۴-۱- تئوری‌های مورد استفاده در رویه‌ها و هسته

برای رویه‌های بالا و پایین، از تئوری برشی مرتبه اول با در نظر گرفتن تغییرمکان‌ها و چرخش‌های کوچک استفاده می‌شود که در آن  $\psi_x^j$  و  $\psi_y^j$  به ترتیب چرخش مقطع عرضی حول محور  $x$  و  $y$  در رویه‌های بالا و پایین هستند.  $u_0^j(x,y,t), v_0^j(x,y,t)$  و  $w_0^j(x,y,t)$  نیز مؤلفه‌های تغییر مکان در صفحه میانی رویه‌ها در راستای  $x, y$  و  $z$  است. میدان جابه‌جایی در رویه‌ها بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} u_i(x,y,z,t) = u_0^i(x,y,t) + z_i \psi_x^i(x,y,t), \\ v_i(x,y,z,t) = v_0^i(x,y,t) + z_i \psi_y^i(x,y,t), \\ w_i(x,y,z,t) = w_0^i(x,y,t) \quad i = t, b. \end{cases} \quad (6)$$

کرنش‌ها در رویه‌ها توسط معادلات زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^i = \varepsilon_{x\alpha\alpha}^i + z_i \kappa_{xx}^i, & \varepsilon_{yy}^i = \varepsilon_{y\alpha\alpha}^i + z_i \kappa_{yy}^i, \\ \gamma_{xy}^i = \gamma_{y\alpha\alpha}^i + z_i \kappa_{xy}^i, & \gamma_{xz}^i = \psi_x^i + \gamma_{x\alpha\alpha}^i, & \gamma_{yz}^i = \psi_y^i + \gamma_{y\alpha\alpha}^i, \end{cases} \quad (7)$$

## ۲-۴- روش انرژی و اصل همیلتون

روش اصلی به دست آوردن معادلات حاکم بر پانل ساندویچی، روش حساب تغییراتی بر پایه کمینه نمودن مجموع انرژی‌های ذخیره شده در جسم و کار نیروهای خارجی وارد بر جسم است. رابطه اصلی این روش با معادله همیلتون به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\delta \int (U + V - T) dt = 0, \quad (12)$$

که در آن،  $U$  بیانگر انرژی پتانسیل ذخیره شده در سازه،  $V$  مجموع انرژی حاصل از کار نیروهای خارجی بر سازه،  $T$  بیانگر انرژی جنبشی که برابر با صفر بوده و  $\delta$  اپراتور تغییرات مرتبه اول می‌باشد.

## ۳-۴- معادله تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل پانل

کل انرژی کرنشی ذخیره شده در رویه‌ها و هسته پانل ساندویچی با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$U = \sum_{i=b}^a \left( \int_{v_i} (\sigma_{xx}^i \epsilon_{xx}^i + \sigma_{yy}^i \epsilon_{yy}^i + \tau_{xy}^i \gamma_{xy}^i + \tau_{xz}^i \gamma_{xz}^i + \tau_{yz}^i \gamma_{yz}^i) dv_i \right) + \int_{v_c} (\sigma_{xx}^c \epsilon_{xx}^c + \sigma_{yy}^c \epsilon_{yy}^c + \sigma_{zz}^c \epsilon_{zz}^c + \tau_{xy}^c \gamma_{xy}^c + \tau_{xz}^c \gamma_{xz}^c + \tau_{yz}^c \gamma_{yz}^c) dv_c, \quad (13)$$

که در آن،  $\sigma_{ij}^i$  و  $\epsilon_{ij}^i$  ( $j = x \text{ or } y$ ): تنش‌ها و کرنش‌های نرمال در جهات  $X$  و  $Y$  و اندیس‌های بالای  $c, b, t$  نشان‌دهنده رویه‌های بالایی، پایینی و هسته میانی هستند،  $\tau_{iz}^c$  و  $\gamma_{iz}^c$  ( $i = x \text{ or } y$ ): تنش‌ها و کرنش‌های برشی قائم در هسته میانی‌اند،  $\sigma_{zz}^c$  و  $\epsilon_{zz}^c$ : تنش‌ها و کرنش‌های نرمال در جهت قائم در هسته میانی هستند و  $v_i$  و  $v_b$  و  $v_c$ : حجم رویه‌های بالا، پایین و هسته میانی می‌باشند.

در رابطه (۱۳) جمله‌های تغییرات انرژی صفحه‌ای که در تئوری مرتبه بالای فراستینگ و تامسون در نظر گرفته نشده نیز در معادلات وارد شده‌اند.

## ۴-۴- معادله تغییرات مرتبه اول انرژی حاصل از

## نیروهای خارجی

معادله تغییرات مرتبه اول انرژی حاصل از نیروهای خارجی به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta v = - \sum_{i=a,b} \left[ \int (q_i \delta w_0^i + q_b \delta w_0^b + \bar{n}_{xi} \delta u_0^i + \bar{n}_{xi} \delta u_0^i) dx dy \right] - \sum_{j=1}^2 \int_0^a \int_0^b (\bar{N}_{xy}^j \delta u_0^j + \bar{N}_{xy}^j \delta u_0^j + \bar{N}_{xy}^b \delta u_0^b + \bar{N}_{xy}^b \delta u_0^b) \delta_D(x-x_j) dx dy \quad (14) - \sum_{j=1}^2 \int_0^a \int_0^b (\bar{N}_{yy}^j \delta u_0^j + \bar{N}_{yy}^j \delta u_0^j + \bar{N}_{yy}^b \delta u_0^b + \bar{N}_{yy}^b \delta u_0^b) \delta_D(y-y_j) dx dy,$$

که در آن،  $q_i$  بارهای دینامیکی عمودی توزیع شده روی رویه‌های بالایی و پایینی پانل هستند.  $\bar{n}$ ، نیز بارهای خارجی از نوع صفحه‌ای<sup>۱</sup> هستند که ماهیت تنش دارند.

$\bar{N}_{xy}^b$  و  $\bar{N}_{xy}^t$  بارهای خارجی عمودی در جهت محور  $x$  روی لبه‌های  $x_2 = a$ ,  $x_1 = 0$  و  $\bar{N}_{yy}^b$  و  $\bar{N}_{yy}^t$  بارهای خارجی عمودی در جهت محور  $y$  روی لبه‌های  $y_2 = a$ ,  $y_1 = 0$  رویه‌های بالایی و پایینی هستند. در واقع این بارها، نیروهایی هستند که منجر به کمانش پانل خواهند شد ( $j = 1, 2$ ).

$\bar{N}_{xy}^b$  و  $\bar{N}_{xy}^t$  بارهای خارجی برشی صفحه‌ای در جهت محور  $y$  یا  $x$  روی لبه‌های رویه‌های بالایی و پایینی هستند.  $\delta_D(x-x_j)$  و  $\delta_D(y-y_j)$  توابع دلتای دیراک در مختصات بارگذاری هستند.

$w_0, v_0, u_0$  به ترتیب تغییر مکان‌ها در جهت محورهای  $x$  و  $y$  و  $z$  روی رویه‌های بالایی و پایینی هستند. از حاصل ضرب جمله‌های نیرو در عباراتی مثل  $z_j w_{,xy}$  به علت نازک بودن رویه‌ها صرف نظر می‌شود.

## ۵-۴- نتایج تنش در رویه‌ها و هسته

انتگرال‌های زیر به عنوان نتایج تنش<sup>۲</sup> در رویه‌ها و هسته تعریف می‌شوند:

1- In-plane

2- Stress Resultants

فوق، روابط میان عوامل وابسته جابه‌جایی در هسته میانی استخراج شده‌اند:

$$\begin{cases} u_2 = \frac{(2(u_0^b + u_0^t) - h_b \phi_x^b + h_t \phi_x^t - 4u_0)}{h_c^2}, \\ u_3 = \frac{(4(u_0^b - u_0^t) - 2(h_b \phi_x^b + h_t \phi_x^t) - 4h_c u_1)}{h_c^3}, \\ v_2 = \frac{(2(v_0^b + v_0^t) - h_b \phi_y^b + h_t \phi_y^t - 4v_0)}{h_c^2}, \\ v_3 = \frac{(4(v_0^b - v_0^t) - 2(h_b \phi_y^b + h_t \phi_y^t) - 4h_c v_1)}{h_c^3}, \\ w_1 = \frac{(w_0^b - w_0^t)}{h_c}, \\ w_2 = \frac{2(w_0^b + w_0^t - 2w_0)}{h_c^2}. \end{cases} \quad (18)$$

۷-۴- سامانه معادلات دیفرانسیل پانل

با استفاده از روابط مربوط به کرنش‌های هسته و رویه‌ها و رابطه (۱۵) و با استخراج رابطه بین مجهولات مستقل و وابسته، به‌کارگیری روابط تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل پانل، اعمال روابط سازگاری و جای‌گذاری آن و رابطه (۱۴) در رابطه همیلتون، معادلات حاکم بر پانل ساندویچی برای تحلیل کمانش استخراج شده‌اند. پنج معادله مربوط به رویه بالا و پنج معادله مربوط به هسته و پنج معادله مربوط به رویه پایین است:

$$\begin{aligned} N_{xx,x}^t + N_{xy,y}^t + \frac{2}{h_c^2} (M_{2xx,x}^c + M_{2xy,y}^c - 2M_{Q1xz}^c) \\ - \frac{4}{h_c^3} (M_{3xx,x}^c + M_{3xy,y}^c - 3M_{Q2xz}^c) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} N_{xx,x}^b + N_{xy,y}^b + \frac{2}{h_c^2} (M_{2xx,x}^c + M_{2xy,y}^c - 2M_{Q1xz}^c) \\ + \frac{4}{h_c^3} (M_{3xx,x}^c + M_{3xy,y}^c - 3M_{Q2xz}^c) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} N_{yy,y}^t + N_{xy,x}^t + \frac{2}{h_c^2} (M_{2yy,y}^c + M_{2xy,x}^c - 2M_{Q1yz}^c) \\ - \frac{4}{h_c^3} (M_{3yy,y}^c + M_{3xy,x}^c - 3M_{Q2yz}^c) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} N_{yy,y}^b + N_{xy,x}^b + \frac{2}{h_c^2} (M_{2yy,y}^c + M_{2xy,x}^c - 2M_{Q1yz}^c) \\ + \frac{4}{h_c^3} (M_{3yy,y}^c + M_{3xy,x}^c - 3M_{Q2yz}^c) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} N_{xx}^i \\ M_{xx}^i \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ Z_i \end{pmatrix} \sigma_{xx}^i dz_i, & \begin{pmatrix} N_{yy}^i \\ M_{yy}^i \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ Z_i \end{pmatrix} \sigma_{yy}^i dz_i, \\ \begin{pmatrix} N_{xy}^i \\ M_{xy}^i \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ Z_i \end{pmatrix} \sigma_{xy}^i dz_i, & Q_{xz}^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \tau_{xz}^i dz_i, \\ Q_{yz}^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \tau_{yz}^i dz_i, & i=t,b \\ \begin{pmatrix} N_{xx}^c \\ N_{yy}^c \\ N_{xy}^c \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^c \\ \sigma_{yy}^c \\ \sigma_{xy}^c \end{pmatrix} dz_c, & \begin{pmatrix} M_{mxx}^c \\ M_{myy}^c \\ M_{mxy}^c \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} Z_c \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^c \\ \sigma_{yy}^c \\ \sigma_{xy}^c \end{pmatrix} dz_c, \\ \begin{pmatrix} Q_{xz}^c \\ Q_{yz}^c \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{pmatrix} \tau_{xz}^c \\ \tau_{yz}^c \end{pmatrix} dz_c, & \begin{pmatrix} M_{Qmxz}^c \\ M_{Qmyz}^c \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} Z_c \begin{pmatrix} \tau_{xz}^c \\ \tau_{yz}^c \end{pmatrix} dz_c, \\ \begin{pmatrix} R_z^c \\ M_{nz}^c \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ Z_c \end{pmatrix} \sigma_{zz}^c dz_c. \end{cases} \quad (15)$$

۶-۴- روابط سازگاری سطح مشترک هسته و رویه‌ها

رویه‌ها و هسته میانی به‌طور کامل به هم چسبیده و توابع کرنش در سطوح اتصال لایه‌ها پیوسته فرض شده‌اند. بنابراین شرایط سازگاری در محل اتصال هسته به رویه‌ها به‌صورت رابطه (۱۶) خواهد بود:

$$\begin{cases} u_i(z=z_i) = u_0^i + \frac{1}{2}(-1)^k h_i \psi_{xi}, \\ v_i(z=z_i) = v_0^i + \frac{1}{2}(-1)^k h_i \psi_{yi}, \quad i=t \rightarrow \left( k=0; z_i = \frac{h_i}{2} \right), \\ w_i(z=z_i) = w_0^i, \quad i=b \rightarrow \left( k=1; z_i = \frac{h_i}{2} \right). \end{cases} \quad (16)$$

با جای‌گذاری روابط میدان‌های جابه‌جایی رویه‌ها و هسته در رابطه فوق، معادلات سازگاری به‌دست خواهند آمد:

$$\begin{cases} u_0 - u_1 \frac{h_c}{2} + u_2 \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 - u_3 \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 = u_0^t + \frac{1}{2} h_t \psi_x^t, \\ u_0 + u_1 \frac{h_c}{2} + u_2 \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 + u_3 \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 = u_0^b - \frac{1}{2} h_b \psi_x^b, \\ v_0 - v_1 \frac{h_c}{2} + v_2 \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 - v_3 \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 = v_0^t + \frac{1}{2} h_t \psi_y^t, \\ v_0 + v_1 \frac{h_c}{2} + v_2 \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 + v_3 \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 = v_0^b - \frac{1}{2} h_b \psi_y^b, \\ w_0 - w_1 \frac{h_c}{2} + w_2 \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 = w_0^t, \\ w_0 + w_1 \frac{h_c}{2} + w_2 \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 = w_0^b. \end{cases} \quad (17)$$

با به‌دست آوردن روابط میان ضرایب وابسته، تعداد مجهولات و معادلات کاهش یافته‌اند. با استفاده از معادلات سازگاری



$$\begin{aligned}
 N_{xx}^i &= A_{11}^i u_{,x}^i + A_{12}^i v_{,y}^i + A_{16}^i (u_{,y}^i + v_{,x}^i) + B_{11}^i \phi_{x,x}^i + B_{12}^i \phi_{y,y}^i + B_{16}^i (\phi_{x,y}^i + \phi_{y,x}^i), \\
 N_{yy}^i &= A_{12}^i u_{,x}^i + A_{22}^i v_{,y}^i + A_{26}^i (u_{,y}^i + v_{,x}^i) + B_{12}^i \phi_{x,x}^i + B_{22}^i \phi_{y,y}^i + B_{26}^i (\phi_{x,y}^i + \phi_{y,x}^i), \\
 N_{xy}^i &= A_{16}^i u_{,x}^i + A_{26}^i v_{,y}^i + A_{66}^i (u_{,y}^i + v_{,x}^i) + B_{16}^i \phi_{x,x}^i + B_{26}^i \phi_{y,y}^i + B_{66}^i (\phi_{x,y}^i + \phi_{y,x}^i), \\
 M_{xx}^i &= B_{11}^i u_{,x}^i + B_{12}^i v_{,y}^i + B_{16}^i (u_{,y}^i + v_{,x}^i) + D_{11}^i \phi_{x,x}^i + D_{12}^i \phi_{y,y}^i + D_{16}^i (\phi_{x,y}^i + \phi_{y,x}^i), \\
 Q_{yz}^i &= k [A_{44}^i (\phi_{y,y}^i + w_{,y}^i) + A_{45}^i (\phi_{x,x}^i + w_{,x}^i)], \\
 Q_{xz}^i &= k [A_{45}^i (\phi_{y,y}^i + w_{,y}^i) + A_{55}^i (\phi_{x,x}^i + w_{,x}^i)], \quad i = (t, b),
 \end{aligned} \quad (34)$$

که در روابط فوق،  $A_{ij}$  سفتی‌های گسترشی،  $D_{ij}$  سفتی‌های خمشی و  $B_{ij}$  سفتی‌های کوپلینگ خمشی-گسترشی نامیده می‌شوند.  $N$  تعداد تک لایه‌های رویه‌هاست. این سفتی‌ها با روابط (۳۵) بر حسب سفتی‌های تک لایه  $(\bar{Q}_{ij}^{(k)})$  تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} (1, z, z^2) dz \\
 &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (1, z, z^2) dz.
 \end{aligned} \quad (35)$$

#### ۴-۹- روابط بنیانی نیروها در هسته

در هسته‌های ایزوتروپیک، مدول الاستیسیته و برشی مقادیر ثابتی هستند. ولی در هسته‌های تشکیل شده از مواد هدفمند،  $E_c, G_c$  در راستای ضخامت بسته به نوع تابع توزیع تعریف شده، متغیرند. بنابراین با انتگرال‌گیری از این توابع، مقادیر آنها در راستای عمودی مشخص می‌شوند:

$$\begin{cases}
 g_{n(xy, xz, yz)}^c = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (Z_i^n G_{(xy, xz, yz)}^c) dz_i, \\
 e_{n(xx, yy, zz)}^c = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (Z_i^n E_{(xx, yy, zz)}^c) dz_i.
 \end{cases} \quad (36)$$

روابط بین تنش‌ها و کرنش‌ها با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases}
 \sigma_{xx}^c = E_{xx}^c \varepsilon_{xx}^c, \quad \tau_{xy}^c = G_{xy}^c \gamma_{xy}^c, \\
 \sigma_{yy}^c = E_{yy}^c \varepsilon_{yy}^c, \quad \tau_{xz}^c = G_{xz}^c \gamma_{xz}^c, \\
 \sigma_{zz}^c = E_{zz}^c \varepsilon_{zz}^c, \quad \tau_{yz}^c = G_{yz}^c \gamma_{yz}^c.
 \end{cases} \quad (37)$$

با جایگذاری روابط مربوط به کرنش‌های هسته (۱۱) و رابطه (۳۶) در رابطه (۳۷)، معادلات مربوط به منته‌های تنش در هسته به شکل زیر تغییر یافته و آنها را روابط بنیانی هسته نامیده‌اند:

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_{xx}^t w_{0,xx}^t + \bar{N}_{yy}^t w_{0,yy}^t + 2\bar{N}_{xy}^t w_{0,xy}^t + Q_{xz}^t \\
 + Q_{yz}^t + \frac{1}{h_c} (-M_{Q1xz,x}^c - M_{Q1yz,y}^c + R_z^c)
 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{2}{h_c} (-2M_z^c + M_{Q2xz,x}^c + M_{Q2yz,y}^c) = 0, \\
 \bar{N}_{xx}^b w_{0,xx}^b + \bar{N}_{yy}^b w_{0,yy}^b + 2\bar{N}_{xy}^b w_{0,xy}^b + Q_{xz}^b \\
 + Q_{yz}^b + \frac{1}{h_c} (M_{Q1xz,x}^c + M_{Q1yz,y}^c - R_z^c)
 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{2}{h_c} (-2M_z^c + M_{Q2xz,x}^c + M_{Q2yz,y}^c) = 0, \\
 M_{xx,x}^t + M_{xy,y}^t + \frac{h_t}{h_c} (M_{2xx,x}^c + M_{2xy,y}^c - 2M_{Q1xz}^c) \\
 + \frac{2h_t}{h_c^3} (M_{3xx,x}^c + M_{3xy,y}^c - 3M_{Q2xz}^c) - Q_{xz}^t = 0,
 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
 M_{xx,x}^b + M_{xy,y}^b + \frac{h_b}{h_c} (M_{2xx,x}^c + M_{2xy,y}^c - 2M_{Q1xz}^c) \\
 - \frac{2h_b}{h_c^3} (M_{3xx,x}^c + M_{3xy,y}^c - 3M_{Q2xz}^c) - Q_{xz}^b = 0,
 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
 M_{yy,y}^t + M_{xy,x}^t + \frac{h_t}{h_c} (M_{2yy,y}^c + M_{2xy,x}^c - 2M_{Q1yz}^c) \\
 - \frac{2h_t}{h_c^3} (M_{3yy,y}^c + M_{3xy,x}^c - 3M_{Q2yz}^c) - Q_{yz}^t = 0,
 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
 M_{yy,y}^b + M_{xy,x}^b - \frac{h_b}{h_c} (M_{2yy,y}^c + M_{2xy,x}^c - 2M_{Q1yz}^c) \\
 - \frac{2h_b}{h_c^3} (M_{3yy,y}^c + M_{3xy,x}^c - 3M_{Q2yz}^c) - Q_{yz}^b = 0,
 \end{aligned} \quad (43)$$

$$N_{xx,x}^c + N_{xy,y}^c - \frac{4}{h_c^2} (M_{2xx,x}^c + M_{2xy,y}^c - 2M_{Q1xz}^c) = 0, \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
 M_{1xx,x}^c + M_{1xy,y}^c - Q_{xz}^c \\
 - \frac{4}{h_c^2} (M_{3xx,x}^c + M_{3xy,y}^c - 3M_{Q2xz}^c) = 0,
 \end{aligned} \quad (45)$$

$$N_{yy,y}^c + N_{xy,x}^c - \frac{4}{h_c^2} (M_{2yy,y}^c + M_{2xy,x}^c - 2M_{Q1yz}^c) = 0, \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
 M_{1yy,y}^c + M_{1xy,x}^c - Q_{yz}^c \\
 - \frac{4}{h_c^2} (M_{3yy,y}^c + M_{3xy,x}^c - 3M_{Q2yz}^c) = 0,
 \end{aligned} \quad (47)$$

$$Q_{xz,x}^c + Q_{yz,y}^c - \frac{4}{h_c^2} (-2M_z^c + M_{Q2xz,x}^c + M_{Q2yz,y}^c) = 0. \quad (48)$$

#### ۴-۸- روابط بنیانی نیروها در رویه‌ها

با توجه به این فرض که هر تک‌لایه نسبت به محور تقارن مواد خود ارتوتروپ بوده و از قانون هوک پیروی می‌نماید، روابط بنیانی رویه‌ها به صورت زیر استخراج می‌شوند:

۴-۱۱- تشکیل دستگاه معادلات جبری از دستگاه

معادلات دیفرانسیل

با جای‌گذاری پاسخ‌های پیشنهادی ناویر در معادلات تعادل به‌دست آمده، عوامل مختصات X و Y از معادلات حذف شده و دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر تعادل تبدیل به یک دستگاه مختصات جبری به شکل کلی زیر تبدیل خواهد شد:

$$\{K\}_{m \times m} \{C\}_{m \times 1} = \{0\}_{m \times 1}, \quad (41)$$

که در آن، C ماتریس مجهولات و K، ماتریس سفستی است که در ذیل یک درایه از آن به‌عنوان نمونه آورده شده است:

$$K(5,5) = -\frac{1}{h_c^2} e_0^{cz} + \frac{8}{h_c^3} e_1^{cz} - \frac{16}{h_c^4} e_2^{cz} - \alpha^2 \left( KA_{35}^t + \frac{1}{h_c^2} g_2^{cz} - \frac{4}{h_c^3} g_3^{cz} + \frac{4}{h_c^4} g_4^{cz} + \bar{N}_{xx}^t \right) - \beta^2 \left( KA_{44}^t + \frac{1}{h_c^2} g_2^{cyz} - \frac{4}{h_c^3} g_3^{cyz} + \frac{4}{h_c^4} g_4^{cyz} + \bar{N}_{yy}^t \right). \quad (42)$$

بسیاری از محققین، بار بحرانی را با استفاده از عوامل هندسی و جنس پانل به صورت یک عدد بی‌بعد بیان نموده‌اند. عامل بی‌بعد کمانش در این تحقیق به صورت رابطه (۴۳) بیان شده است [۲]:

$$\bar{N}_{xx} = \frac{\bar{N}_{xx} b^2}{\pi^2 D_{11}^t}. \quad (43)$$

۵- بررسی درستی نتایج

در این قسمت روش حل ارائه شده با چند تحقیق دیگر مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

۵-۱- بار بحرانی کمانش ورق مربعی ایزوتروپ همگن

در این مثال، بار بحرانی کمانش ورقی ایزوتروپ و همگن در حالت اول  $(m, n) = 1$ ، در بارگذاری تک‌محوره مورد بررسی قرار می‌گیرد. ورق به شکل مربعی و بارگذاری در دو سمت مقابل به‌صورت فشاری است. بار بحرانی بی‌بعد و مشخصات مکانیکی به شرح زیر می‌باشند:

$$P^* = \frac{Pa^2}{h^3 E}, E = 145.81 \text{ (GPa)}, \nu = 0.44. \quad (44)$$

$$N_{xx}^C = e_0^{cx} u_{0,x} + e_1^{cx} u_{1,x} + e_2^{cx} u_{2,x} + e_3^{cx} u_{3,x},$$

$$N_{yy}^C = e_0^{cy} v_{0,y} + e_1^{cy} v_{1,y} + e_2^{cy} v_{2,y} + e_3^{cy} v_{3,y},$$

$$N_{xy}^C = g_0^{cxy} (u_{0,y} + v_{0,x}) + g_1^{cxy} (u_{1,y} + v_{1,x}) + g_2^{cxy} (u_{2,y} + v_{2,x}) + g_3^{cxy} (u_{3,y} + v_{3,x}),$$

$$M_{nxx}^C = e_n^{cx} u_{0,x} + e_{n+1}^{cx} u_{1,x} + e_{n+2}^{cx} u_{2,x} + e_{n+3}^{cx} u_{3,x},$$

$$M_{nyy}^C = e_n^{cy} v_{0,y} + e_{n+1}^{cy} v_{1,y} + e_{n+2}^{cy} v_{2,y} + e_{n+3}^{cy} v_{3,y},$$

$$M_{nxy}^C = g_n^{cxy} (u_{0,y} + v_{0,x}) + g_{n+1}^{cxy} (u_{1,y} + v_{1,x}) + g_{n+2}^{cxy} (u_{2,y} + v_{2,x}) + g_{n+3}^{cxy} (u_{3,y} + v_{3,x}), n = 1, 2, 3.$$

$$M_{Q_{0xz}}^C = g_n^{cz} (u_1 + W_{0,x}) + g_{n+1}^{cz} (2u_2 + W_{1,x}) + g_{n+2}^{cz} (3u_3 + W_{2,x}), \quad (38)$$

$$M_{Q_{0yz}}^C = g_n^{cyz} (v_1 + W_{0,y}) + g_{n+1}^{cyz} (2v_2 + W_{1,y}) + g_{n+2}^{cyz} (3v_3 + W_{2,y}),$$

$$n = 1, 2,$$

$$Q_{xz}^C = g_0^{cz} (u_1 + W_{0,x}) + g_1^{cz} (2u_2 + W_{1,x}) + g_2^{cz} (3u_3 + W_{2,x}),$$

$$Q_{yz}^C = g_0^{cyz} (v_1 + W_{0,y}) + g_1^{cyz} (2v_2 + W_{1,y}) + g_2^{cyz} (3v_3 + W_{2,y}),$$

$$R_Z^C = e_0^{cz} w_1 + 2e_1^{cz} w_2,$$

$$M_Z^C = e_1^{cz} w_1 + 2e_2^{cz} w_2.$$

در پایان، با جای‌گذاری روابط بنیانی به‌دست آمده در روابط (۳۳-۱۹)، معادلات دیفرانسیل نهایی پانل برای بارگذاری کمانشی به‌دست خواهند آمد.

۴-۱۰- پاسخ ناویر تحلیل کمانش پانل ساندویچی با

تکیه‌گاه ساده

شرایط مرزی مسئله در هر چهار لبه پانل ساندویچی ساده است. روابط زیر که پاسخ ناویر نامیده می‌شوند، شرایط مرزی را ارضاء نموده‌اند. ضرایب ثابت موجود در این سری‌ها با استفاده از معادلات تعادل به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \{u_0^i, \phi_x^i, v_0^i, w_0^i\} &= \left\{ C_{u_0}^{mm}, C_{\phi_x}^{mm}, C_{v_0}^{mm}, C_{w_0}^{mm} \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\ \{v_0^i, \phi_y^i, v_0^i, v_1^i\} &= \left\{ C_{v_0}^{mm}, C_{\phi_y}^{mm}, C_{v_0}^{mm}, C_{v_1}^{mm} \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y), \\ \{w_0^i, w_0^i\} &= \left\{ C_{w_0}^{mm}, C_{w_0}^{mm} \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad i = t, b. \end{aligned} \quad (39)$$

با توجه تقارن مسئله نسبت به صفحه میانی، اثرات متقابل نیروهای غشایی با انحناهای خمشی و نیروهای خمشی با کرنش‌های سطح میانی صفر می‌شود. لذا خواهیم داشت:

$$A_{16}^i = A_{26}^i = B_{16}^i = B_{26}^i = D_{16}^i = D_{26}^i = 0, \quad i = t, b. \quad (40)$$

تساوی بارها با یکدیگر، برای یافتن مقدار هر تک بار، نتیجه بر حسب نیوتن نصف شده است.

جدول (۳): بار بحرانی کمانش پانل با هسته و رویه‌های همگن تحت بارگذاری تک محوره.

$a/b = 2$	Almorth [۱۷]	حل حاضر
$N_{cr}$	60464 N	59575 N

۶- بررسی اثر نسبت طول به عرض پانل ساندویچی بر حالت کمانش بار بحرانی

در حل دستگاه معادلات حاکم بر تعادل به روش ناپیر، عوامل  $m$  و  $n$  معرف حالت کمانش پانل ساندویچی هستند. مثلاً با انتخاب  $(m, n) = (1, 1)$  بار کمانش مربوط به حالت هندسی اول پانل به دست آمده است. اما بار بحرانی کمانش، همواره بار کمانش حالت اول نبوده و برابر با بار حداقل به دست آمده از همه مقادیر  $m$  و  $n$  است. با انتخاب مقادیر منتخب برای رویه‌ها و هسته، اثر تغییرات نسبت طول به عرض پانل روی حالت بحرانی کمانش بررسی خواهد شد. عرض پانل  $b = 1 m$ ، نسبت ضخامت کل به عرض پانل  $h/b = 0.03$  و لایه‌چینی رویه‌ها به شکل 0/90/0 core 0/90/0 است. مشخصه‌های دیگر پانل بدین شرح است:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = 172.7 \text{ GPa}, \\ E_2 = 7.2 \text{ GPa}, \\ G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.76 \text{ GPa}, \\ \nu = 0.3, \\ h_t = h_b = 3 \times 0.001 m, \end{array} \right. \quad \text{مواد رویه‌ها}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = 172.7 \text{ GPa}, \\ E_2 = 24.51 \text{ GPa}, \\ G_1 = 3.76 \text{ GPa}, \\ G_2 = 3.34 \text{ GPa}, \\ \nu = 0.3. \end{array} \right. \quad \text{مواد هسته} \quad (۴۷)$$

جدول (۱): بار بحرانی بی‌بعد کمانش یک ورق مربعی ایزوتروپ همگن.

$a/h$	Librescu [۱۶]	Zenkour [۸]	حل حاضر
20	3.9442	3.9441	4.0084
50	4.0573	4.0574	4.0704

۵-۲- بار بحرانی کمانش ورق مربعی هدفمند

در این مثال، بار بحرانی کمانش ورقی هدفمند از جنس آلومینیوم و آلومینا در حالت اول  $(m, n) = 1$ ، در بارگذاری تک‌محوره مورد بررسی قرار می‌گیرد. ورق مربعی هدفمند مورد نظر، دارای تابع توزیع چندجمله‌ای متقارن، توان توزیع  $p = 5$  و نسبت ضخامت  $a/h = 10$  است. بارگذاری در دو سوی مقابل به صورت فشاری است. بار بحرانی بی‌بعد و مشخصات مکانیکی به شرح زیر هستند:

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{Pa^2}{100h^3 E_0}, & E_0 &= 1 \text{ (GPa)}, \\ E_m &= 70E_0, & \nu_m &= 0.3, \\ E_c &= 380E_0, & \nu_c &= 0.3. \end{aligned} \quad (۴۵)$$

جدول (۲): بار بحرانی بی‌بعد کمانش ورق هدفمند.

Zenkour [۸]	Zenkour [۸]	حل حاضر
CLPT	FSDP	
4.8571	4.7147	4.5172

۵-۳- بار بحرانی کمانش پانل ساندویچی با هسته و رویه‌های همگن

بار بحرانی کمانش پانلی مستطیلی با رویه‌ها و هسته همگن مورد بررسی قرار می‌گیرد. بارگذاری فشاری تک محوره در دو سوی مقابل در بالا و پایین پانل اعمال می‌شود. خواص مواد و هندسه پانل عبارتند از [۱۸]:

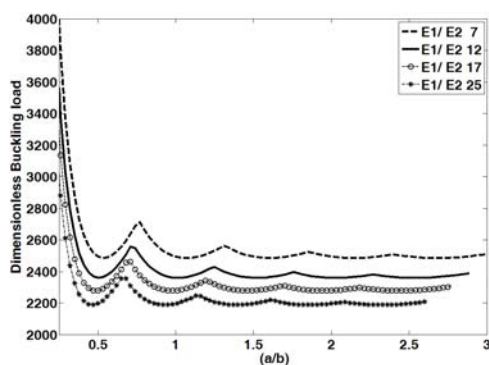
$$\begin{aligned} a &= 0.508(m), \quad b = 0.254(m), \quad h_t = h_b = 0.000508(m), \\ h_c &= 0.00508(m), \quad E_t = E_b = 10^7 \text{ (Psi)}, \quad G_c = 1.2 \times 10^4 \text{ (Psi)}. \end{aligned} \quad (۴۶)$$

کم‌ترین مقدار بار بحرانی به ازای  $(m, n) = (3, 1)$  به دست آمده است. حل حاضر مجموع بارهای بالا و پایین در یک سمت پانل را بر حسب  $(N/m)$  نتیجه داده است. با توجه به

همان‌گونه که در شکل ۷ مشخص است، در ابتدا وقتی پانل از نظر ابعاد هندسی در کم‌ترین مقدار نسبت طول به عرض خود است، مقدار بار کمانش در حالت اول از همه حالت‌های دیگر کمتر است. بنابراین پانل در شکل حالت اول شروع به کمانش نموده است.

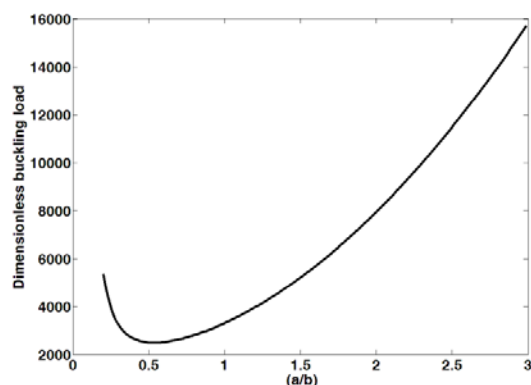
با افزایش نسبت طول به عرض پانل از مقدار اولیه به نسبتی رسیده که در آن بار کمانشی بحرانی برای وقوع حالت دوم از مقدار لازم برای حالت اول کمتر شده است. بنابراین اصل حداقل انرژی کسب شده که پایه و اساس استخراج معادلات تعادل است، پانل دیگر مایل به ادامه کمانش در حالت اول نخواهد بود و وارد شکل حالت کمانشی دوم خواهد شد. با ادامه روند افزایش ضریب منظر، سامانه در حالتی قرار گرفته که بار کمانش بحرانی کمتری نسبت به حالت‌های دیگر داشته باشد. بنابراین با یافتن نقاط تقاطع نمودارهای حالت‌های متوالی و حذف نقاطی که کمانش پانل بدون وجود قید هیچ‌گاه در محدوده آنها رخ نداده، نمودار بار بحرانی کمانش برحسب نسبت طول به عرض کامل شده است.

در این مرحله، نمودار بار بی‌بعد بحرانی کمانش به افزایش نسبت طول به عرض، در پنج حالت اول با در نظر گرفتن تغییرات سفتی هسته  $E_1/E_2$  برای انواع تابع توزیع ماده هدفمند بررسی شده است.



شکل (۸): نمودار پنج حالت اول بار کمانش به تغییرات نسبت طول به عرض پانل با هسته E-FGM.

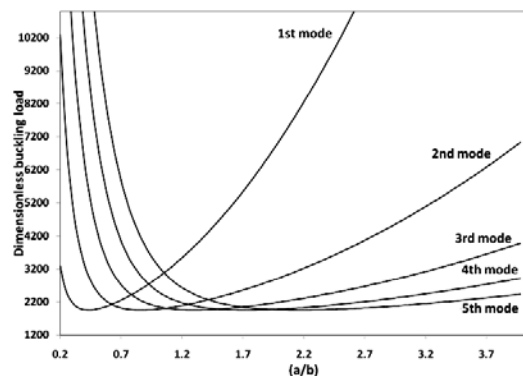
در شکل ۶، به ازای  $m=1$  مقدار طول پانل از حدود  $0.2$  تا  $3$  متر تغییر نموده. در هر مرحله از اجرای برنامه به ازای  $0.15$  متر افزایش طول، بار کمانش مربوطه مشخص شده است. تابع توزیع هسته، نمایی است.



شکل (۶): نمودار حالت اول بار کمانش به تغییرات

نسبت طول به عرض پانل با هسته E-FGM.

فرض شود پانل مقید به کمانش در حالت دوم است. همان روند رسم نمودار که برای حالت اول توضیح داده شد، برای  $m=2$  نیز تکرار خواهد شد. با همین فرض برای حالت‌های سوم، چهارم و پنجم این روند برای مقادیر  $m=3,4,5$  تکرار خواهد شد. نمودارهای مربوط به کمانش یک پانل ساندویچی با هسته توانی و توان توزیع  $p=5$  در پنج حالت اول در شکل ۷ نمایش داده شده است. مشخصات دیگر پانل طبق رابطه (۴۷) است.



شکل (۷): نمودار پنج حالت اول بار کمانش به تغییرات نسبت طول به عرض پانل با هسته P-FGM و توان تابع توزیع خواص  $p=5$ .

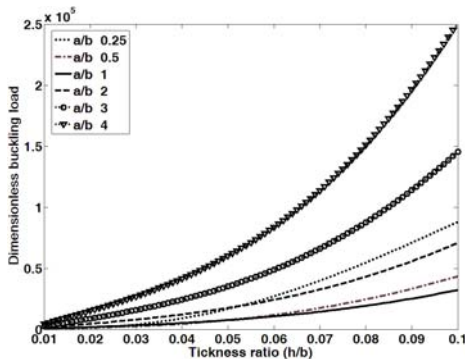
با دقت در شکل‌های ۱۱-۸ ملاحظه می‌شود که:

هرچه مرکز پانل نرم‌تر شود، یعنی نسبت مدول‌های الاستیسیته افزایش یابد، قابلیت جذب انرژی پانل کاهش یافته و سازه در بار کم‌تری از انرژی اشباع شده و در حالت تعادل بی‌تفاوت کمانش قرار خواهد گرفت. این کاهش بار بحرانی، در پانل با هسته S-مانند کم‌ترین مقدار را دارد.

تغییر سفتی هسته، نقاط گذار حالت کمانش از حالت اول به حالت دوم، از دوم به سوم و غیره را تغییر داده است. این نقاط با افزایش سفتی هسته و به عبارتی کاهش نسبت  $E_1/E_2$  به سمت راست نمودار جابه‌جا شده‌اند، یعنی تمایل به تغییر حالت در پانل ساندویچی در نسبت‌های طول به عرض بالاتر بروز یافته است.

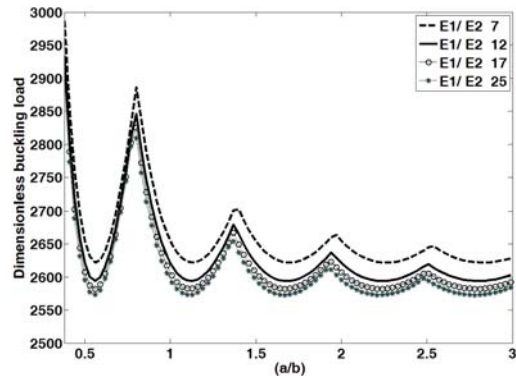
#### ۷- بررسی اثر نسبت ضخامت پانل ساندویچی بر بار بحرانی کمانش

در این بخش اثرات نسبت ضخامت کل هسته به عرض آن، بر بار بحرانی کمانش در حالت اول بررسی شده است. این بررسی در هر نمودار برای انواع نسبت طول به عرض انجام می‌شود. نسبت ضخامت از ۰/۰۱ شروع شده و رفته رفته پانل ضخیم‌تر شده و در انتها به نسبت ۰/۱ خواهد رسید. سایر مشخصات پانل طبق رابطه (۴۷) است. در هر مرحله از اجرای برنامه نسبت ضخامت پانل به میزان ۰/۰۰۱ افزایش یافته و بار بحرانی مربوط به آن به‌دست آمده است. نمودارهای شکل‌های ۱۲-۱۳ برای انواع توابع توزیع هدفمند هسته نشان می‌دهند.



شکل (۱۲): نمودار بار کمانش به تغییرات نسبت

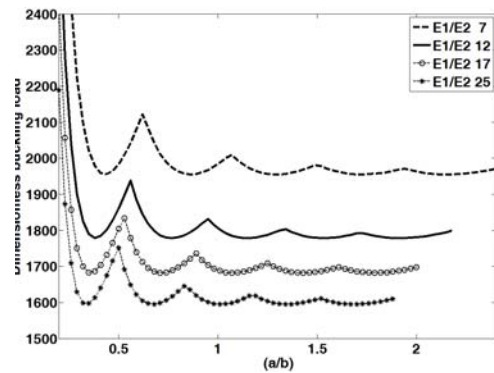
ضخامت پانل با هسته E-FGM.



شکل (۹): نمودار پنج حالت اول بار کمانش به

تغییرات نسبت طول به عرض پانل با هسته

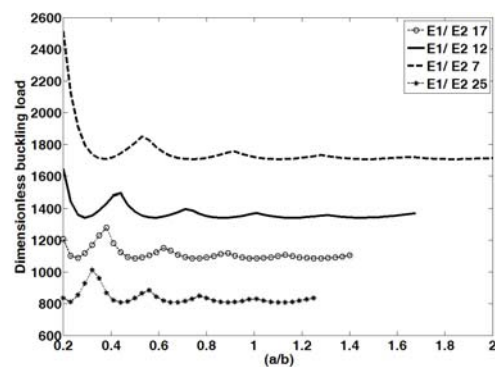
S-FGM و توان  $p=1$ .



شکل (۱۰): نمودار پنج حالت اول بار کمانش به

تغییرات نسبت طول به عرض پانل با هسته

P-FGM و توان توزیع  $p=5$ .



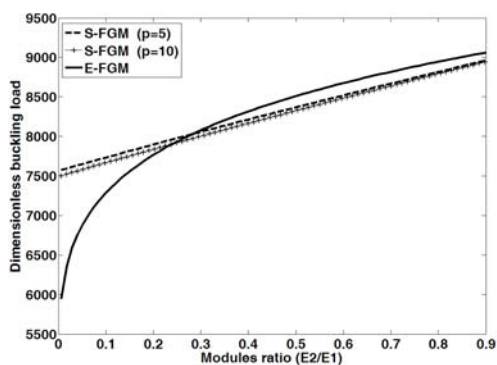
شکل (۱۱): نمودار پنج حالت اول بار کمانش به

تغییرات نسبت طول به عرض پانل با هسته

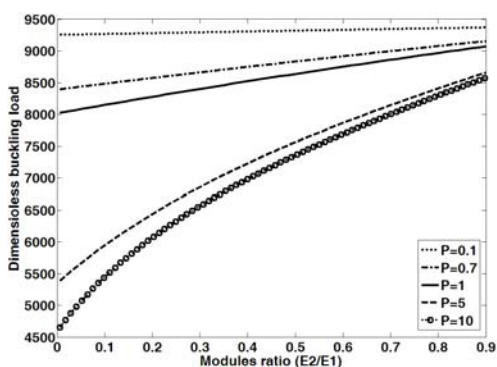
P-FGM و توان توزیع  $p=10$ .

شکل‌های ۱۷-۱۵ نتایج را برای انواع توابع توزیع هدفمند هسته نشان می‌دهند. با توجه به اینکه توان توزیع در تغییرات بار بحرانی پانل با هسته توانی اثر مشهودتری نسبت به حالت S- مانند دارد، پنج مقدار مختلف آن بررسی شده است.

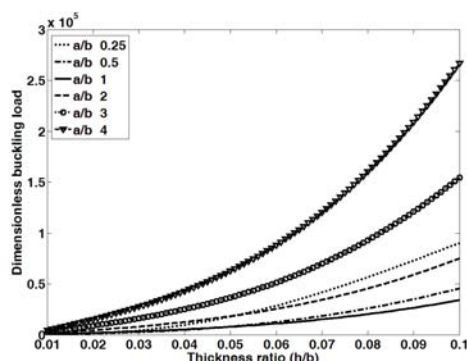
در شکل ۱۷ با انتخاب پانلی با هسته توانی و توان  $p=10$ ، اثرات تغییرات مدول الاستیسیته هسته بر بار بحرانی در انواع نسبت طول به عرض بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با سفت‌تر شدن محدوده مرکزی هسته پانل، بار بحرانی کم‌تر افزایش یافته است. این افزایش برای توان‌های بالاتر در هسته توانی مشهودتر است، زیرا سهم ماده با مدول  $E_2$  در کسر حجمی بیش‌تر شده است.



شکل (۱۵): نمودار بار کم‌انح به تغییرات نسبت مدول الاستیسیته در پانل با هسته S-FGM و توان توزیع خواص  $p=5, 10$  و هسته E-FGM.



شکل (۱۶): نمودار بار کم‌انح به تغییرات نسبت مدول الاستیسیته در پانل با هسته P-FGM و توان توزیع خواص  $p=0/1, 0/7, 1, 5, 10$ .

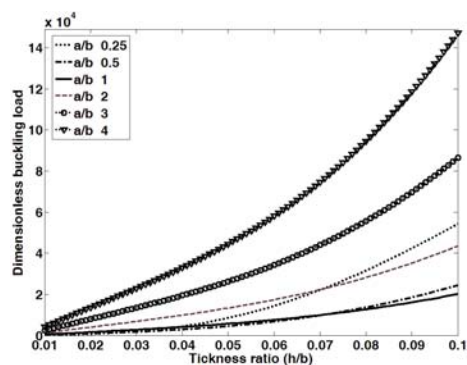


شکل (۱۳): نمودار بار کم‌انح به تغییرات نسبت ضخامت پانل با هسته S-FGM و توان توزیع  $p=5$ .

#### ۸- بررسی اثر نسبت مدول الاستیسیته هسته هدفمند بر بار بحرانی کم‌انح پانل ساندویچی

در این قسمت اثر نسبت مدول الاستیسیته مرکز هسته هدفمند به طرفین آن  $(E_2/E_1)$ ، بر بار بحرانی در حالت اول کم‌انح مورد مطالعه قرار گرفته است. پانل مربعی شکل و ضخامت کل آن  $h = 0.05m$  است.

در ابتدا مدول الاستیسیته مرکز هسته  $E_2 = 1GPa$  است و در انتهای نمودار با افزایش مقدار  $E_2$  نسبت  $(E_2/E_1)$  بیشینه شده رفتار پانل به حالتی که به طور کامل همگن و با مدول  $E_1$  باشد، نزدیک می‌شود. در هر مرحله از اجرای کد برنامه،  $E_2$  به مقدار  $2GPa$  افزایش یافته و مقدار بار بحرانی بی‌بعد کم‌انح به ازای آن به دست خواهد آمد.



شکل (۱۴): نمودار بار کم‌انح به تغییرات نسبت ضخامت پانل با هسته P-FGM و توان توزیع خواص  $p=10$ .

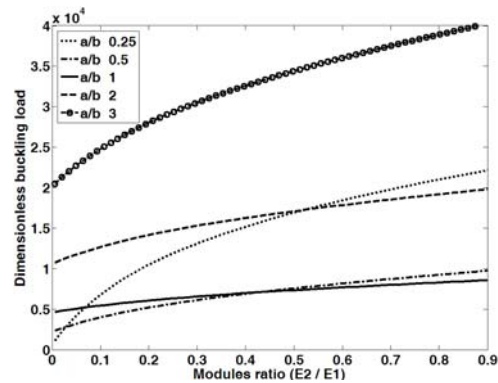
بحرانی کمانش مقدار کمتری نسبت به حالت‌های دیگر داشته باشد. اطلاع از نقاط تقاطع نمودارهای حالت‌های متوالی، باعث شده تا بتوان نسبت طول به عرض مناسب برای مقاومت کمانشی دلخواه پانل را انتخاب نمود. البته دیگر مشخصات پانل از جمله نسبت مدول الاستیسیته مواد هسته و ضخامت پانل در نقاط گذار حالت‌های کمانشی نیز بسیار با اهمیت باشد، ولی حساسیت بار بحرانی کمانش به مقدار  $(a/b)$  با افزایش این نسبت کاهش یافته تا اینکه در مقادیر بالا بتوان گفت به طور تقریبی یکنواخت خواهد شد.

۵- افزایش سختی هسته و یا کاهش نسبت  $(E_1/E_2)$  باعث شده تمایل به تغییر حالت کمانش در پانل در نسبت‌های طول به عرض بالاتر بروز پیدا کند. کاهش سفتی ماده مرکزی هسته هدفمند، قابلیت جذب انرژی پانل و در نتیجه مقدار بار بحرانی کمانش را کاهش خواهد داد و

۶- با افزایش نسبت ضخامت پانل، بار بحرانی کمانش افزایش یافته و اثر تغییر توان توزیع ماده هدفمند نیز مشهودتر خواهد شد. این اثر به نسبت  $(a/b)$  نیز بستگی دارد و نمودارهای افزایش نسبت ضخامت به بار بحرانی برای نسبت‌های طول به عرض متفاوت، همدیگر را قطع نموده‌اند. آگاهی از مقدار نسبت ضخامت در این نقاط تقاطع باعث اطلاع از ابعاد مناسب طول و عرض پانل برای افزایش مقاومت کمانشی خواهد شد.

#### مراجع

1. Kant, T. and Patil, H. S. "Buckling Load of Sandwich Columns with a Higher-Order Theory", J. Reinforced Plast. & Compos., Vol. 10, No. 1, pp.102-109, 1991.
2. Frostig, Y. "Buckling of Sandwich Panels with a Flexible Core- High-Order Theory", Int. J. Solid's Struct., Vol. 35, No's. 3-4, pp. 183-204, 1998.
3. Kant, T. and Swaminathan, K. "Analytical Solutions, Using a Higher Order Refined Theory for Stability Analysis of Laminated Composite and Sandwich Plates", Struct. Eng. Mech., Vol. 10, No. 4, pp. 337-57, 2000.
4. Reddy, J.N. "Analysis of Functionally Graded Plates", Int. J. Num. Meth. in Eng., Vol. 47, No's. 1-3, pp. 663-684, 2000.
5. Cheng, Z.Q. and Batra, R.C. "Exact Correspondence between Eigenvalues of Membranes and Functionally Graded Simply Supported Polygonal Plates", J. Sound and Vib., Vol. 229, No. 4, pp. 879-895, 2000.



شکل (۱۷): نمودار بار کمانش به تغییرات نسبت

مدول الاستیسیته در پانل با هسته P-FGM و توان توزیع خواص  $p=10$  و نسبت‌های مختلف طول به عرض.

#### ۹- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، رفتار کمانشی پانل ساندویچی با هسته هدفمند متقارن و شرایط تکیه‌گاهی دور تا دور مفصل تحت بارگذاری تک محوره بررسی و نتایج زیر حاصل شده است:

۱- در این پانل‌ها هرگاه هسته بسیار سخت باشد، مؤلفه‌های تنش درون صفحه‌ای هسته مقادیر قابل توجهی یافته و دیگر نمی‌توان مانند هسته نرم از آنها صرف‌نظر نمود. با توجه به اینکه هسته هدفمند جزء هسته‌های سخت محسوب می‌شود، این مؤلفه‌ها در معادلات تعادل در نظر گرفته شده‌اند.

۲- در پانل‌های ساندویچی با هسته هدفمند متقارن و شرایط هندسی یکسان، نوع تابع توزیع خواص و توان توزیع در نظر گرفته شده برای هسته، اثر زیادی بر مقدار بار بحرانی کمانش دارد. حساسیت بار بحرانی به تغییر توان تابع توزیع در حالت چندجمله‌ای، بسیار بیش‌تر از حالت S-مانند است. با افزایش توان تابع توزیع، مقدار بار بحرانی کمانش کاهش یافته است. با اطلاعات این نمودارها می‌توان بدون تغییر در ابعاد هندسی پانل و فقط با تغییر توان تابع توزیع، مقدار مقاومت پانل در برابر کمانش را به مقدار مطلوب رساند.

۳- تغییرات ابعاد هندسی و نسبت مدول‌های الاستیسیته مواد هسته اثر قابل ملاحظه‌ای بر مقدار بار بحرانی کمانش با توجه به نوع تابع توزیع خواص انتخابی دارد.

۴- افزایش نسبت طول به عرض پانل  $(a/b)$ ، باعث تغییر در حالت کمانش شده و سامانه در حالتی قرار گرفته که بار

12. Matsunaga, H. "Free Vibration and Stability of Functionally Graded Plates According to a 2-D Higher-order Deformation Theory", *Compos. Struct.*, Vol. 82, No. 4, pp. 499–512, 2008.
13. Abrate, S. "Functionally Graded Plates Behave Like Homogeneous Plates", *Compos. Part B: Eng.*, Vol. 39, No. 1, pp. 151–158, 2008.
14. Kashtalyan, M. and Menshykova, M. "Three-dimensional Elasticity Solution for Sandwich Panels with a Functionally Graded Core", *Compos. Struct.*, Vol. 87, No. 1, pp. 36–43, 2009.
15. Bodaghi, M. and Saidi A.R. "Levy-type Solution for Buckling Analysis of Thick Functionally Graded Rectangular Plates, Based on the Higher-order Shear Deformation Plate Theory", *Applied Math. Modeling*, Vol. 34, No. 11, pp. 3659–3673, 2010.
16. Librescu, L. and Khdeir, A.A. "Reddy Further Results Concerning the Dynamic Response of Shear Deformable Elastic Orthotropic Plates", *ZAAM*, Vol. 70, No. 1, pp. 23-33, 1990.
17. Almorh, B.O. and Brush D.O. "Buckling of Bars, Plates and Shells", 1976.
6. Javaheri, R. and Eslami, M.R. "Buckling of Functionally Graded Plates under In-plane Compressive Loading", *ZAMM*, Vol. 82, No. 4, pp. 277–283, 2002.
7. Anderson, T.A. "A 3D Elasticity Solution for a Sandwich Composite with Functionally Graded Core Subjected to Transverse Loading by a Rigid Sphere", *Compos. Struct.*, Vol. 60, pp. 265–74, 2003.
8. Zenkour, A.M. "A Comprehensive Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates: Part 2- Buckling and Free Vibration", *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 42, pp. 5243-5258, 2005.
9. Samsam-Shariat, B.A., Javaheri, R., and Eslami, M.R. "Buckling of Imperfect Functionally Graded Plates under In-plane Compressive Loading", *Thin-walled Struct.*, Vol. 43, No. 7, pp. 1020–1036, 2005.
10. Aydogdu, M. "Conditions for Functionally Graded Plates to Remain Flat under In-plane Loads by Classical Plate Theory", *Compos. Struct.*, Vol. 82, No.1, pp. 155–157, 2008.
11. Trung-Kien, N., Karam, S., and Bonnet, G. "First-order Shear Deformation Plate Models for Functionally Graded Materials", *Compos. Struct.*, Vol. 83, No. 1, pp. 25–36, 2008.